

Тема 5. Електричні вимушені коливання

Питання лекції:

1. Вимушені електричні коливання.
2. Електричний резонанс.
3. Використання електричного резонансу в техніці зв'язку.
4. Автоколивання і їх застосування.
5. Параметричні коливання і їх застосування.

1. Вимушені електричні коливання

Вимушені незгасаючі коливання підтримуються в коливальних контурах радіопередавачів. Щоб викликати вимушені коливання, необхідно здійснювати на систему зовнішній періодичний вплив. У випадку електричних коливаний це можна зробити, якщо ввімкнути в контур змінну ЕРС (рис. 5.1) :

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t . \quad (1)$$

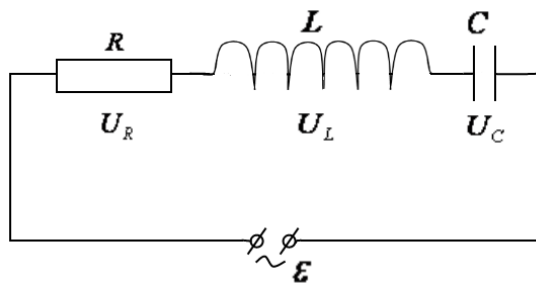


Рис. 5.1

За другим правилом Кірхгофа

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_m \cos \omega t . \quad (2)$$

Враховуючи, що $I = \frac{dq}{dt}$, запишемо

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t} \quad (3)$$

або
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \omega t, \quad (4)$$

де
$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (5)$$

Ми одержали диференціальне рівняння для коливання заряду на пластинах конденсатора при вимушених коливаннях. Як бачимо, рівняння (4) має такий же вигляд, як і диференціальне рівняння вимушених механічних коливань, (*ф-ла (5) теми 4*), тільки в ролі зміщення x тут заряд q на пластинах конденсатора. Розв'язком диференціального рівняння (3), (4) буде гармонічна функція

$$q = q_m \cos(\omega t + \psi), \quad (6)$$

де q_m – амплітуда (максимальне значення) заряду на пластинах конденсатора, ψ – початкова фаза коливання. Як бачимо, коливання відбуваються за гармонічним законом з частотою ω вимушуючої сили.

Аналогічно до механічних коливань, амплітуда вимушених коливань q_m має вигляд:

$$q_m = \frac{\frac{\varepsilon_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (7)$$

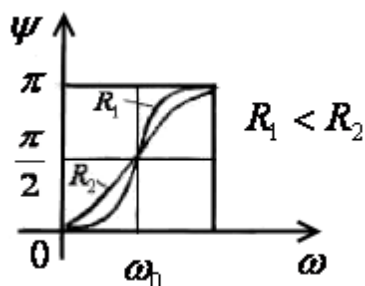


Рис. 5.2

Фаза коливань ω визначається з рівняння

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

На рис. 5.2 представлено залежність фази вимушених коливань від частоти.

Таким чином, для електричних коливань, так же як і для механічних, амплітуда і фаза складним чином залежать від частоти. При деякій частоті $\omega \approx \omega_{рез}$ має місце **різке зростання амплітуди заряду – електричний резонанс.**

2. Електричний резонанс

а) Резонанс заряду і напруги на конденсаторі

Ми встановили (7), що амплітуда коливань заряду q_m при вимушених коливаннях залежить від частоти :

$$q_m = \frac{\frac{\varepsilon_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Різке зростання амплітуди коливань заряду при наближенні частоти ω вимушуючої ЕРС до частоти ω_0 , називається електричним резонансом.

Графічно залежність $q_m = f(\omega)$ зображена на рис. 5.3.

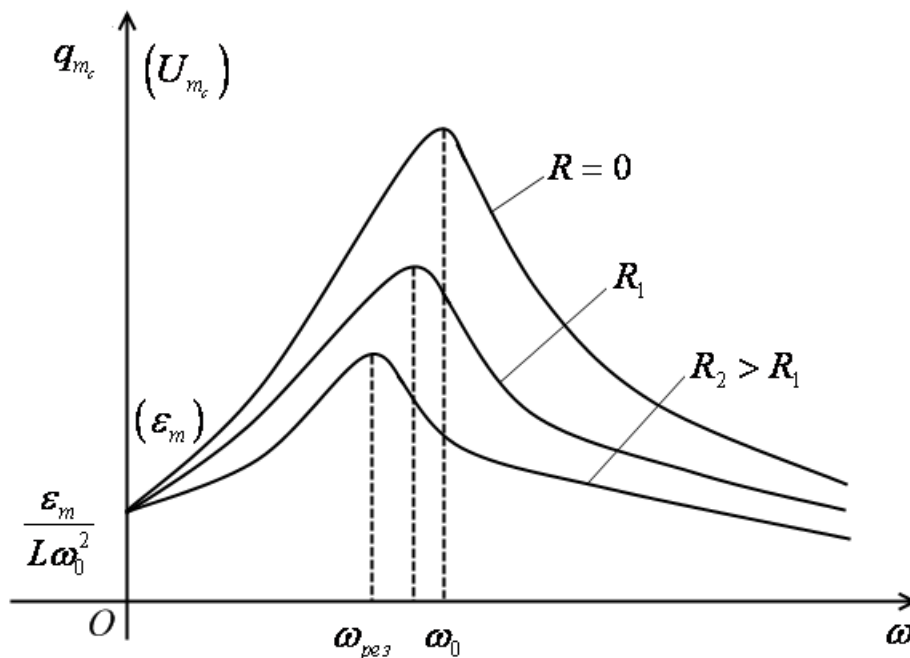


Рис. 5.3



Резонансну частоту можна знайти із умови максимуму – рівності нулеві похідної $\frac{dq_m}{d\omega}$. Розрахунок дає такий вираз для резонансної частоти коливання заряду (див. с.)::

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} < \omega_0 \quad (9)$$

Таким чином, резонансна частота залежить від коефіцієнта згасання $\beta = \frac{R}{2L}$, тобто від опору R .

Напруга на конденсаторі змінюється аналогічно до заряду, тобто з однаковою фазою:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \psi). \quad (10)$$

Амплітуда напруги має аналогічну залежність від частоти:

$$U_{m_c} = \frac{q_m}{C} = \frac{\frac{\varepsilon_m}{L}}{C \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (11)$$

Резонанс має місце при тій же частоті, що і для заряду:

$$\omega_{рез} = \omega_{U_{cрез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Якщо $\beta \ll \omega_0$ (слабке згасання), то $\omega_{рез} \approx \omega_0$.

Амплітуда напруги при резонансі

$$\begin{aligned} U_{m_{cрез}} &\approx \frac{\varepsilon_m / LC}{\sqrt{4\beta^2 \omega_0^2}} = \frac{\varepsilon_m \omega_0^2}{2\beta \omega_0} = \\ &= \frac{\varepsilon_m \omega_0}{2\beta} = \frac{\varepsilon_m 2\pi}{2\beta T} = \varepsilon_m \frac{\pi}{\lambda}, \end{aligned}$$

тобто

$$U_{m_{cрез}} \approx \varepsilon_m Q. \quad (12)$$

Таким чином, напруга на конденсаторі при резонансі в Q разів вища від прикладеної напруги (вимушуючої ЕРС):

$$\frac{U_{m_{\text{рез}}}}{\varepsilon_m} = Q. \quad (12')$$

Тому явище резонансу використовується для виділення із складного сигналу потрібної складової напруги (з даною частотою).

Нехай ЕРС, яка виникає в антені (рис. 5.4), збуджує в контурі коливання різних частот

$$\varepsilon = \varepsilon_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \varepsilon_{m2} \cos(\omega_2 t + \psi_2) + \dots$$

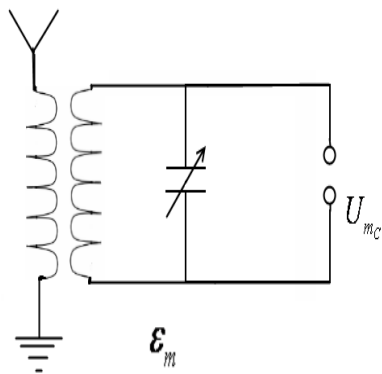


Рис. 5.4

Настроївши контур на частоту ω_1 (пібравши L і C), можна одержати на конденсаторі для даної складової напругу U_{mc} в Q разів більшу. Напруги ж інших складових будуть невеликі. Таким чином дійснюється налаштування приймача на дану довжину хвилі.

б) Коливання струму в колі в залежності від частоти. Резонанс струму

Знайдемо вираз для сили струму при вимушених коливаннях.

Оскільки $q = q_m \cos(\omega t + \psi)$, то

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t + \psi) = \\ &= \underbrace{\omega q_m}_{I_m} \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\omega q_m \sin(\omega t + \psi) = \\ &= \omega q_m \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} I &= I_m \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_m \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

де фаза коливань

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

а амплітуда

$$\omega q_m = I_m \quad (15)$$

Як бачимо, між коливанням заряду q (б) на конденсаторі (а також напруги U_C) і коливанням струму I (13) в колі існує різниця фаз $\pi/2$.

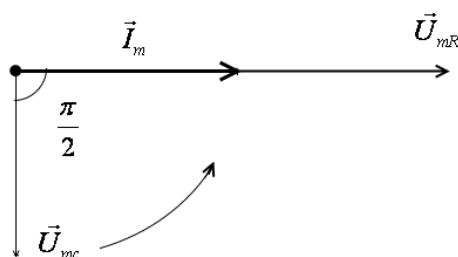


Рис. 5.5

Струм I в колі випереджує напругу U_C на конденсаторі на $\pi/2$. Це можна наочно представити на векторній діаграмі (рис. 5.5).

Із (18) знайдемо резонансну частоту:

$$\omega_{I_{рез}}^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\omega_{I_{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (19)$$

Тобто, резонанс для струму настає при частоті власних коливань ω_0 контура при всіх значеннях активного опору.

3. Використання електричного резонансу в техніці зв'язку

а) Резонанс напруг

Звернемося ще раз до схеми коливального контура, в яку послідовно увімкнена вимушуюча ЕРС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$ (рис. 5.7).

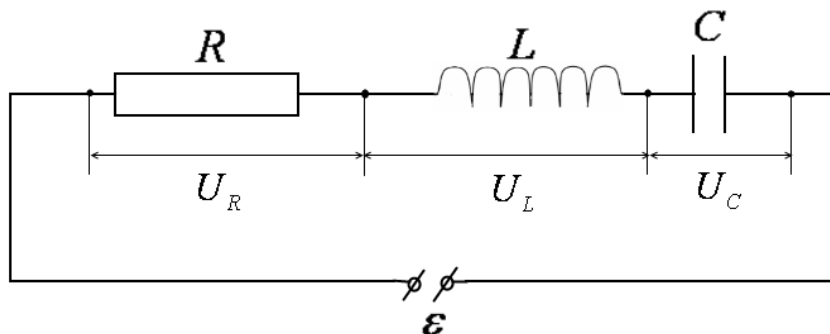


Рис. 5.7

За другим правилом Кірхгофа

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_m \cos \omega t,$$

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon_m \cos \omega t.$$

U_R U_C U_C

Тут $U_R = IR$; $U_C = q/C$; $U_L = L \cdot dI/dt$ – напруги на активному опорі, конденсаторі та котушці індуктивності відповідно. Співставимо ці напруги.

Згідно з (13) струм у колі

$$I = \omega q_m \cos(\omega t + \varphi),$$

де $\varphi = \psi + \pi/2$.

Напруга на активному опорі

$$U_R = IR = R\omega q_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (20)$$

Як бачимо, напруга на активному опорі співпадає за фазою з силою струму.

Напруга на конденсаторі

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \psi)$$

або

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (21)$$

тобто вона відстає за фазою на $\pi/2$ від сили струму.

Напруга на котушці індуктивності випереджає силу струму (19) за фазою на $\pi/2$:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -L\omega^2 q_m \sin(\omega t + \varphi),$$

$$U_L = L\omega^2 q_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (22)$$

Напруги U_R , U_C , U_L зручно зобразити за допомогою векторної діаграми: $\vec{U} = \vec{\mathcal{E}} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_L$ (рис. 5.8).

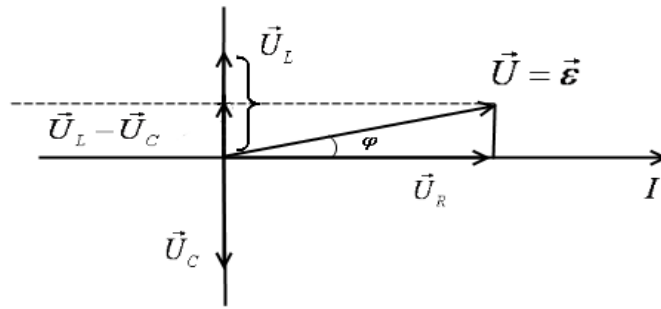


Рис. 5.8

Як бачимо, між сумарною напругою U на всіх опорах і силою струму I існує різниця фаз φ . Оцінимо цю різницю фаз:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L I - \frac{1}{\omega C} I}{R I} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Якщо ємнісний і індуктивний опори рівні за величиною ($\omega L = \frac{1}{\omega C}$), то φ стає рівною нулю і прикладена напруга перебуває в однаковій фазі з силою струму. Опір кола при цьому мінімальний і дорівнює активному опорі: $Z = R$, а сила струму досягає найбільшого значення. Напруги U_L і U_C можуть набувати довільних значень, але вони перебувають в протифазі і тому компенсують одна одну. Такі умови дістали назву **резонансу напруг**. Резонанс напруг настає при $\omega_{\text{рез}U} = \omega_0$. Відзначимо, що сила струму в колі при послідовному з'єднанні ємності і індуктивності - найбільша, Вираз **резонанс напруг** визначає не фізичне явище, а технічне; це схемний ефект. У техніці існує і інше поняття – **резонанс струмів**.

б) Резонанс струмів

Резонанс струмів спостерігається у випадку паралельного з'єднання конденсатора C і котушки індуктивності L в колі вимушеної ЕРС \mathcal{E} (рис. 5.9).

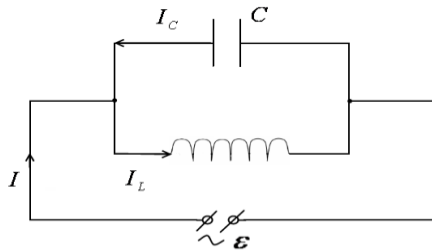


Рис. 5.9

У данному випадку зовнішня ЕРС \mathcal{E} є однакою для ємнісної і індуктивної гілок.



Повна сила струму в колі за законом Кірхгофа:

$$I = |I_L| - |I_C|.$$

Коливання сили струму в конденсаторі і в котушці індуктивності відбуваються з різницею фаз, близькою до π , тобто у протифазі. Тому повна сила струму і сила струму у підвідних провідниках приблизно дорівнює різниці струмів I_C і I_L :

$$|I_L| - |I_C| \gg I.$$

При деякій частоті $\omega_{рез1} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ цей струм різко зменшується, а опір контура досягає найбільшого значення. В той же час I_C і I_L можуть бути значними.

Явище різкого зменшення амплітуди струму в зовнішньому колі при наближенні частоти ω_0 вимушеної ЕРС до власної частоти ω_0 називається резонансом струмів або паралельним резонансом.

Властивість контура створювати великий опір змінному струму з частотою, близькою до ω_0 , використовується у резонансних підсилювачах, які дають можливість виділяти одне певне коливання із сигналу складної форми. Схема такого підсилювача зображена на рис. 5.10.

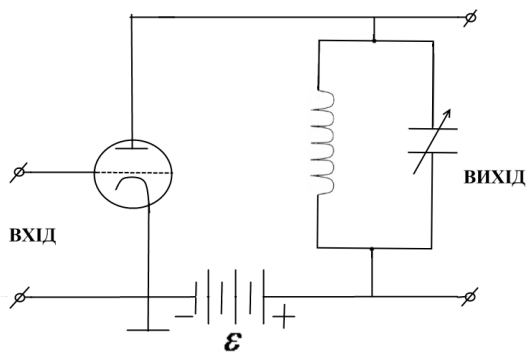


Рис. 5.10

Найбільша напруга буде у тієї складової, для якої має місце резонанс, тобто власна частота коливального контура ω_0 стає близькою до частоти сигналу.

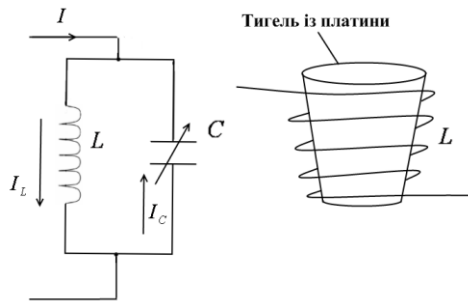


Рис. 5.11

Резонанс струмів використовується також в індукційних печах, де нагрівання металів здійснюється вихорними струмами (рис. 5.11).

Ємність конденсатора, увімкненого паралельно до нагрівальної котушки L , підбирається так, щоб при частоті генератора відбувався резонанс струмів, внаслідок чого сила струму через нагрівальну котушку буде набагато більшою, ніж сила струму в підвідних провідниках.

4. Автоколивання і їх застосування

Для одержання незгасаючих коливань коливальна система повинна одержувати із зовні енергію, щоб поповнити втрати при коливаннях.

Система, яка сама керує постачанням енергії, називається автоколивальною системою.

Прикладом автоколивальної системи може бути годинник, в якому незгасаючі коливання маятника підтримуються за допомогою анкера.

Як приклад електричної автоколивальної системи можна розглядати ламповий генератор, який містить коливальний контур, з'єднаний з сіткою лампи (рис. 5.12).

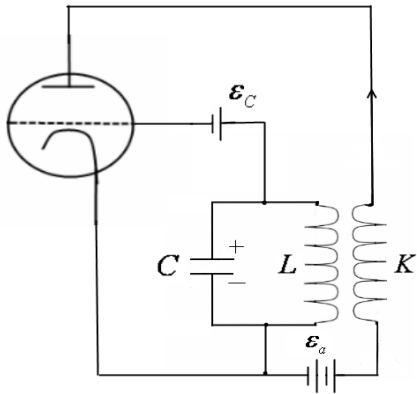


Рис. 5.12

У колі анода є котушка K , яка індуктивно зв'язана із котушкою індуктивності L коливального контура. Коли в коливальному контурі виникають коливання, між пластинами конденсатора виникає напруга. Така ж напруга виникає між сіткою і катодом лампи, так як вони під'єднані до пластин конденсатора.

В результаті у колі анода виникає змінний струм, який викликає в котушці L змінну ЕРС, що й сприяє коливанням у контурі. Спосіб одержання незгасаючих електромагнітних коливань застосовується в радіотехніці при частотах $f < 10^9$ Гц.

5. Параметричні коливання і їх застосування

Параметричні коливання відбуваються тоді, коли один із параметрів коливальної системи періодично змінюється. Розглянемо приклад механічного параметричного коливання. Нехай маємо маятник, довжину якого можна змінювати. Будемо періодично змінювати довжину маятника, підтягуючи нитку кожного разу, коли маятник буде в стані рівноваги, і будемо відпускати при крайніх положеннях маятника (рис. 5.13). Тоді помітимо, що маятник коливається із зростаючою амплітудою.

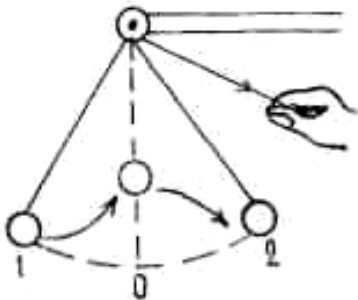


Рис. 5.13

Збільшення амплітуди коливання при періодичній зміні одного із параметрів коливальної системи одержало назву параметричного резонансу.

Пояснення цього явища таке: коли ми вкорочуємо



нитку в положенні 0, то зовнішня сила здійснює роботу, збільшуючи потенціальну енергію коливальної системи, що призводить до зростання амплітуди коливань.

Аналогічне явище параметричного резонансу спостерігається і в електричних коливальних контурах, якщо параметри контура (ємність, індуктивність) періодично змінюються.

Розглянемо коливальний контур LC , що має конденсатор із рухомою пластиною, яке можна то наближати, то віддаляти відносно другої пластини (рис. 5.14).

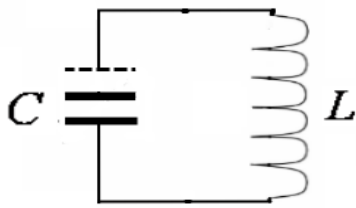


Рис. 5.14

Припустимо, що в момент часу, коли заряд конденсатора рівний нулеві, ми зближуємо пластини. Це не супроводжується ніякою роботою, оскільки заряд конденсатора рівний нулеві і сила притягання між пластинами теж рівна нулеві.

Через чверть періоду ($T/4$) заряд на конденсаторі буде найбільшим. Якщо в цей момент розсунути пластини, то зовнішні сили здійснять роботу на подолання взаємного притягання пластин. При цьому ємність конденсатора зменшиться, а напруга між пластинами зросте, сприяючи коливанням у контурі. Якщо потім знову через $T/4$ наблизити пластини, то енергія контура не зміниться, так як заряд в цей час знову рівний нулеві. При наступному розведенні пластин в контур знову буде введена певна енергія і т.д. Тому, змінюючи досить сильно ємність конденсатора з частотою, що дорівнює подвійній частоті власних коливань, ми одержимо в контурі електричні коливання зі зростаючою амплітудою.

Питання для контролю

1. Записати та пояснити диференціальне рівняння вимушеного електричного коливання та його розв'язок.
2. Записати та пояснити формулу для амплітуди вимушеного коливання заряду та напруги на пластинах конденсатора, сили струму в коливальному контурі.
3. Що таке електричний резонанс ?

4. Зобразити графічно та пояснити залежність амплітуди заряду чи напруги на конденсаторі від частоти.
6. Що таке резонанс струму ?
7. Що таке імпеданс, реактивний опір (реактанс), індуктивний опір, ємнісний опір ?
7. Що таке резонанс напруг, резонанс струмів ?
8. Записати та пояснити формулу для частоти при резонансі.
9. Що таке автоколивання ? Де вони застосовуються ?
10. Що таке параметричні коливання ? Де вони використовуються ?

Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс фізики, т. 2, ч. I. – Киев: КВВИУС, 1987. – §33-37
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 2. – Киев: КВВИУС, 1978.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Період згасаючих коливань 4 с, логарифмічний декремент згасання 1,6, початкова фаза дорівнює нулеві. Зміщення точки в момент часу $t_1 = \frac{T}{4}$ с дорівнює 4,5 см. Написати рівняння руху для цього коливання.

Відповідь: $x = 0,07e^{-0,4t} \cdot \sin \frac{\pi}{2}t$.

Рекомендація для розв'язку

Амплітуду згасаючого коливання знайти з умови, що в момент часу $t_1 = \frac{T}{4}$ с зміщення точки $x_1 = 4,5$ см.

2. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2 мкФ і котушки індуктивністю $5,07 \times 10^{-3}$ Г. При якому логарифмічному декременті згасання різниця потенціалів на обкладках конденсатора за 10^{-3} с зменшиться в три рази? Чому при цьому дорівнює опір контура ? Відповідь: $\lambda = 0,22$; $R = 10$ Ом.

Рекомендації для розв'язку

При розрахунку логарифмічного декремента згасання λ коефіцієнт згасання β слід знайти із відношення двох амплітудних значень напруги на обкладках конденсатора, а період знайти за

формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

3. Добротність деякого коливального контура дорівнює 10. Визначити на скільки відсотків відрізняється частота коливаний контура ω від власної частоти контура ω_0 , тобто знайти значення $\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \cdot 100$. Відповідь: 1%.

Рекомендація для розв'язку

Для розв'язку задачі необхідно у формулі для добротності логарифмічний декремент згасання виразити через частоту коливаний контура ω і власну частоту контура ω_0 .

3. Тіло масою $m=10$ г здійснює згасаючі коливання з максимальним значенням амплітуди 7 см, початковою фазою рівною нулеві і коефіцієнтом згасання рівним $1,6 \text{ с}^{-1}$. На це тіло почала діяти зовнішня періодична сила і встановилися вимушені коливання. Рівняння вимушених коливаний: $x=5\sin(10\pi t - 0,75\pi)$ см. Знайти: 1) рівняння власних коливаний з числовими коефіцієнтами; 2) рівняння зовнішньої періодичної сили.

Відповідь: 1) $x=7e^{-1,6t} \sin 10,5\pi t$ см;
2) $F=0,07 \sin 10\pi t$.

Рекомендації для розв'язку

1) Рівняння власних коливаний можна записати тоді, коли буде знайдена власна частота ω_0 . Цю частоту можна знайти із різниці фаз між вимушуючою силою і вимушеними коливаннями.

2) Амплітудне значення сили можна знайти із виразу для амплітуди вимушених коливаний даного тіла.

5. Амплітуди зміщень вимушених гармонічних коливаний при частотах ($\omega_1 = 400$ рад/с і $\omega_2 = 600$ рад/с дорівнюють одна одній. Знайти частоту, при якій амплітуди зміщень максимальні.

Відповідь: $\omega_{рез} = 509$ рад/с.

Рекомендації для розв'язку

Для розв'язання данної задачі треба прирівняти між собою знаменники у виразах амплітуд вимушених коливань при частотах ω_1 і ω_2 і зробити відповідні математичні перетворення.

